

# Varianta 95

**SUBIECTUL I (30p)**

- 5p** 1. Să se demonstreze că  $(1+\sqrt{2})^2 + (1-\sqrt{2})^2$  este un număr natural.
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ . Să se demonstreze că  $f(x) \geq -1$ , oricare ar fi numărul real  $x$ .
- 5p** 3. Să se rezolve sistemul  $\begin{cases} 2x + 2y = 16 \\ xy = 12 \end{cases}$ , unde  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** 4. Să se rezolve ecuația  $\frac{n!}{12} = (n-2)!$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .
- 5p** 5. Se consideră reperul cartezian  $xOy$  și punctele  $A(1, -1)$  și  $B(3, 5)$ . Să se determine coordonatele punctului  $C$  din plan astfel încât  $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC}$ .
- 5p** 6. Să se calculeze  $\cos A$  în triunghiul  $ABC$ , știind că  $AB = 2$ ,  $BC = 3$  și  $AC = 4$ .

**SUBIECTUL II (30p)**

1. În mulțimea  $M_3(\mathbb{R})$  se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$  și  $C = A + B$ .

- Se notează cu  $X^2 = X \cdot X$
- 5p** a) Să se efectueze produsul  $A \cdot B$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $\det(A) \cdot \det(B)$ .
- 5p** c) Să se demonstreze că  $A^2 - B^2 = 6(A + B)$ .
2. Pe mulțimea mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compozиție  $x * y = x + y + 2$  și  $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$ .
- 5p** a) Să se demonstreze că  $x \circ y = (x+2)(y+2)-2$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$
- 5p** b) Să se determine simetricul elementului  $x = -3$  în raport cu legea de compozиție " $\circ$ ".
- 5p** c) Să se rezolve sistemul  $\begin{cases} x^2 * y^2 = 7 \\ x^2 \circ y^2 = 16 \end{cases}$ , unde  $x, y \in \mathbb{N}$ .

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ .
- 5p** a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ , pentru orice  $x > 1$ .
- 5p** b) Să se determine ecuația asymptotei oblice către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p** c) Să se arate că  $f(\sqrt[3]{2}) \geq f(\sqrt[3]{3})$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - x$  și  $g(x) = \sqrt{1-x}$ .
- 5p** a) Să se determine  $\int f(x) dx$ .
- 5p** b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $g$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=0$  și  $x=1$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) \cdot \ln x dx$ .