

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine termenul al patrulea al unei progresii aritmetice, știind că primul termen este 2 și rația este 3.
- 5p** 2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^2 - x + m = 0$ să admită soluții de semne contrare.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 - x - 2) - \log_2(2x - 4) = 1$.
- 5p** 4. Să se rezolve ecuația $C_n^1 + A_n^2 = 4$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
- 5p** 5. Să se determine aria unui triunghi ABC , știind că $AB = AC = 2$ și $m(\angle A) = 30^\circ$.
- 5p** 6. Să se calculeze $2\sin^2 135^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid X^2 = X \right\}$, unde $X^2 = X \cdot X$.
- 5p** a) Să se verifice că $A \in G$.
- 5p** b) Să se calculeze $\det(A^3 - 2A^2 + A)$, unde $A^3 = A \cdot A \cdot A$.
- 5p** c) Să se demonstreze că $(2X - I_2)^2 = I_2$, oricare ar fi $X \in G$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compozиție $x * y = xy - \sqrt{2009}(x + y) + 2009 + \sqrt{2009}$.
- 5p** a) Să se arate că $x * y = (x - \sqrt{2009})(y - \sqrt{2009}) + \sqrt{2009}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Să se determine elementul neutru al legii de compozиție „*”.
- 5p** c) Știind că legea de compozиție „*” este asociativă, să se calculeze $(-\sqrt{2009}) * (-\sqrt{2008}) * \dots * 0 * \dots * (\sqrt{2008}) * (\sqrt{2009})$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot e^x$.
- 5p** a) Să se verifice că $f'(x) = (x+1)(x+3) \cdot e^x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Să se demonstreze că $f(-2) + f(-4) \leq \frac{8}{e^3}$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$.
- 5p** a) Să se arate că funcția f admite primitive.
- 5p** b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este convexă pe $(1; +\infty)$.
- 5p** c) Să se calculeze $\int_0^e f(x) dx$.