

Varianta 66

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că numerele $\log_2 2$, C_3^1 și 5 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p** 2. Să se determine punctele de intersecție a graficului funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{x+1} - 1$ cu axele de coordonate.
- 5p** 3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 + 2x + 6m - 1 = 0$ verifică relația $x_1 + x_2 = x_1 x_2$.
- 5p** 4. Să se calculeze $0! + 1! + 2! + 3!$.
- 5p** 5. Să se calculeze lungimile catetelor triunghiului ABC , știind că $m(\angle A) = 90^\circ$, $m(\angle B) = 60^\circ$ și lungimea ipotenuzei este egală cu 8.
- 5p** 6. Să se determine aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(2;0)$, $B(0;4)$ și $C(1;6)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $x, y, z, t \in \mathbb{Q}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Să se calculeze $\det(A^2)$, știind că $A^2 = A \cdot A$.
- 5p** b) Să se determine $x, y, z, t \in \mathbb{Q}$ știind că $A \cdot B = I_2$.
- 5p** c) Știind că $A \cdot B = I_2$ să se calculeze $S = (B^{-1} - A)^2$.
2. Pe mulțimea numerelor întregi definim legile de compozиție $x * y = x + y - 3$ și $x \circ y = xy - 3(x + y) + 12$.
- 5p** a) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $x \circ x = 12$.
- 5p** b) Să se arate că $1 \circ (2 * 3) = (1 \circ 2) * (1 \circ 3)$.
- 5p** c) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} (x-3) * y = 2 \\ (x-y) \circ 4 = 10 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{x+2}, & x \geq 0 \\ x + \frac{3}{2}, & x < 0 \end{cases}$.
- 5p** a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 0$.
- 5p** b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Să se arate că $f(x) \in \left[\frac{3}{2}, 2\right)$, oricare ar fi $x \in [0; +\infty)$.
- 5p** 2. a) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{1}{x^2 + 2x} dx$.
- 5p** b) Să se demonstreze că $\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx \leq 1$.
- 5p** c) Se consideră funcția $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ și numerele reale pozitive a, b și c . Să se demonstreze că, dacă numerele $\int_1^a f(x) dx$, $\int_1^b f(x) dx$, $\int_1^c f(x) dx$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, atunci numerele a, b, c sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.