

# Varianta 45

**SUBIECTUL I (30p)**

- 5p** 1. Să se determine coordonatele vârfului parabolei asociate funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 4x - 5$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x - 4$ . Să se calculeze  $f(1) + f(2) + \dots + f(10)$ .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_3(10 - x) = 2$ .
- 5p** 4. Să se rezolve ecuația  $A_n^2 = 12$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .
- 5p** 5. În reperul cartesian  $xOy$  se consideră punctele  $A(1,2)$ ,  $B(5,2)$  și  $C(3,-1)$ . Să se calculeze perimetrul triunghiului  $ABC$ .
- 5p** 6. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea  $A = \{\sin 30^\circ, \sin 45^\circ, \sin 60^\circ\}$ , acesta să fie număr rațional.

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră matricele  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  din  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Se notează  $A^2 = A \cdot A$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $A^2$ .
- 5p** b) Să se verifice că  $A^2 = (a+d)A - (ad-bc)I_2$ .
- 5p** c) Știind că  $a+d \neq 0$  și  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  cu  $A^2M = MA^2$ , să se demonstreze că  $AM = MA$ .
2. Se consideră polinomul  $f \in \mathbb{R}[X]$ ,  $f = X^3 - 2X^2 + aX + b$  cu rădăcinile  $x_1, x_2, x_3$ .
- 5p** a) Pentru  $a=1$  și  $b=0$  să se determine  $x_1, x_2, x_3$ .
- 5p** b) Știind că  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$ , să se arate că  $a=1$ .
- 5p** c) Știind că  $f = (X - x_1^2)(X - x_2^2)(X - x_3^2)$ , să se determine numerele reale  $a$  și  $b$ .

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcțiile  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x-1)e^x$  și  $g(x) = xe^x$ .
- 5p** a) Să se verifice că  $f'(x) = g(x)$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** b) Să se determine ecuația asimptotei spre  $-\infty$  la graficul funcției  $g$ .
- 5p** c) Dacă  $I \subset \mathbb{R}$  este un interval, să se demonstreze că funcția  $g$  este crescătoare pe  $I$  dacă și numai dacă funcția  $f$  este convexă pe  $I$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, g : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  și  $g(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ .
- 5p** a) Să se arate că funcția  $f$  este o primitivă a funcției  $g$ .
- 5p** b) Să se calculeze  $\int_1^e f(x)g(x)dx$ .
- 5p** c) Să se determine numărul real  $a \in (1; +\infty)$  astfel încât  $\int_1^a f(x)dx = 2$ .