

Varianta 6

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze $a^2 + b^2$, știind că numerele a și b au suma egală cu 4 și produsul egal cu 3.
- 5p** 2. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$ și $g(x) = x + 4$. Să se calculeze coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor f și g .
- 5p** 3. Să se determine valorile reale pozitive ale numărului x , știind că $\lg \sqrt{x}, \frac{3}{2}$ și $\lg x$ sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p** 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots, \sqrt{10}\}$, acesta să fie rațional.
- 5p** 5. Să se determine numărul real a , știind că dreptele $2x - y + 3 = 0$ și $ax + 2y + 5 = 0$ sunt paralele.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 1$, $AC = 2$ și $BC = \sqrt{5}$. Să se calculeze $\cos B$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n, 2^n)$, $n \in \mathbb{N}$.
- 5p** a) Să se demonstreze că punctele O, A_1, A_2 sunt coliniare.
- 5p** b) Să se determine numărul de drepte care trec prin cel puțin două dintre punctele O, A_0, A_1, A_2 .
- 5p** c) Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele A_n, A_{n+1}, A_{n+2} , $n \in \mathbb{N}$.
2. Se consideră mulțimea $G = \{A_x \mid x \in \mathbb{Z}\}$, unde matricea $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{Z}$.
- 5p** a) Să se verifice că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.
- 5p** b) Știind că mulțimea G împreună cu operația de înmulțire a matricelor formează o structură de grup, să se determine elementul neutru al grupului (G, \cdot) .
- 5p** c) Să se arate că funcția $f : \mathbb{Z} \rightarrow G$, $f(x) = A_x$ este morfism între grupurile $(\mathbb{Z}, +)$ și (G, \cdot) .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2}$.
- 5p** a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 5p** b) Să se verifice că $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}$, oricare ar fi $x \geq 0$.
- 5p** c) Să se demonstreze că $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 2$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + e^x + 1$.
- 5p** a) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe \mathbb{R} .
- 5p** b) Să se calculeze $\int_0^1 x f(x) dx$.
- 5p** c) Să se demonstreze că $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = e + \frac{1}{3}$.