

**SUBIECTUL I (30p)**

- 5p** 1. Să se calculeze  $10^{\lg 7} - \sqrt[3]{343}$ .
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația  $2x^2 - 3x + 1 \leq 0$ .
- 5p** 3. Să se arate că funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \log_3 2^x - x$  este injectivă.
- 5p** 4. Să se calculeze numărul diagonalelor unui poligon convex cu 8 laturi.
- 5p** 5. Fie  $ABCD$  un paralelogram și  $P$  un punct astfel ca  $\overline{BP} = 2\overline{PD}$ . Să se arate că  $\overline{BP} = \frac{2}{3}(\overline{BA} + \overline{BC})$ .
- 5p** 6. Fie  $a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , astfel încât  $a + b = \frac{\pi}{4}$ . Să se arate că  $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = 1$ .

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră sistemul  $\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 5t = -1 \\ x + 9y + mz + t = 3 \\ 5x - 6y + 10z + nt = p \end{cases}$ ,  $m, n, p \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Să se determine  $p$  astfel încât sistemul să admită o soluție  $(x_0, y_0, z_0, t_0)$  cu  $z_0 = t_0 = 0$ .
- 5p** b) Să se arate că, pentru orice  $m, n \in \mathbb{R}$ , rangul matricei sistemului este mai mare sau egal cu 2.
- 5p** c) Să se determine  $m, n, p \in \mathbb{R}$  pentru care sistemul este compatibil, iar matricea sistemului are rangul 2.
2. Fie mulțimea  $Q_0 = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, m \text{ și } n \text{ sunt impare} \right\}$  și  $G = Q_0 \times \mathbb{Z}$ . Pe  $G$  se definește legea de compozиție  $(q_1, k_1) * (q_2, k_2) = (q_1 q_2, k_1 + k_2)$ ,  $\forall q_1, q_2 \in Q_0, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ .
- 5p** a) Să se arate că  $(G, *)$  este grup abelian.
- 5p** b) Să se calculeze  $(1, 1) * (1, 2) * \dots * (1, 10)$ .
- 5p** c) Să se arate că funcția  $f : G \rightarrow \mathbb{Q}^*$ ,  $f((q, k)) = q \cdot 2^k$  este un izomorfism între grupurile  $(G, *)$  și  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ .

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$ .
- 5p** a) Să se arate că graficul funcției  $f$  admite asimptotă spre  $+\infty$ .
- 5p** b) Să se determine punctele de extrem local ale funcției  $f$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(2\operatorname{arctg} f(x) - \pi)$ .
2. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{3 + \cos x}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $\int_0^{\pi} f(x) dx$ .
- 5p** b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcției  $f$  este strict crescătoare.
- 5p** c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt$ .