

# Varianta 68

## SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se arate că numărul  $\frac{25}{4+3i} + \frac{25}{4-3i}$  este întreg.
- 5p 2. Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (m^2 - 2)x - 3$  să fie strict descrescătoare.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\arctg \frac{x}{3} + \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$ .
- 5p 4. Să se determine probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale pare de două cifre, acesta să fie divizibil cu 4.
- 5p 5. Pe laturile  $AB$  și  $AC$  ale triunghiului  $ABC$  se consideră punctele  $M$  și respectiv  $N$  astfel încât  $\overline{AM} = 3\overline{MB}$  și  $\overline{AN} = \frac{3}{4}\overline{AC}$ . Să se demonstreze că vectorii  $\overline{MN}$  și  $\overline{BC}$  sunt coliniari.
- 5p 6. Să se calculeze  $\sin \frac{11\pi}{12}$ .

## SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  și  $B = A + A^t$ , unde  $A^t$  este transpusa matricei  $A$ .
- 5p a) Să se arate că  $B^t = B$ .
- 5p b) Să se demonstreze că, dacă  $B = 2I_2$ , atunci  $\det(A) \geq 1$ .
- 5p c) Să se demonstreze că, dacă  $x, y \in \mathbb{C}$  și matricea  $xA + yA^t$  este inversabilă, atunci  $x + y \neq 0$ .
2. Se consideră ecuația  $x^3 + px + q = 0$ ,  $p, q \in \mathbb{R}$ , și  $x_1, x_2, x_3$  soluțiile complexe ale acesteia.
- 5p a) Știind că  $p = 1$  și  $q = 0$ , să se determine  $x_1, x_2, x_3$ .
- 5p b) Să se determine  $p$  și  $q$  știind că  $x_1 = 1+i$ .
- 5p c) Să se arate că  $12(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7) = 7(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2$ .

## SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln \frac{2x+1}{2x+3}$ .
- 5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ .
- 5p b) Să arate că  $f(x) < 0$ ,  $\forall x \in (0, \infty)$ .
- 5p c) Să demonstreze că sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln \left( n + \frac{1}{2} \right)$  este strict descrescător.
2. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ .
- 5p a) Să se arate că funcția  $f$  este impară.
- 5p b) Să se arate că  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .
- 5p c) Să se arate că  $\int_0^1 f(x) dx \leq e - 2$ .