

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ cu termeni reali, știind că $b_1 = 1$ și $b_4 = 27$.
- 5p 2. Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 8$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2} = 9^{1-x}$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.
- 5p 5. Se consideră punctele A, B și C astfel încât $\overline{AB} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\overline{BC} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$. Determinați lungimea vectorului \overline{AC} .
- 5p 6. Calculați sinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB = 4$, $BC = 5$ și $\sin C = \frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 0 & 0 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$.
- 5p a) Calculați $\det(A(1))$.
- 5p b) Determinați numerele reale m știind că $A(m) \cdot A(-m) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Arătați că $\det(A(1) + A(2) + \dots + A(101)) = -51^2 \cdot 101^3$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată de $x \circ y = xy - 4x - 4y + 20$.
- 5p a) Calculați $3 \circ 4$.
- 5p b) Arătați că $x \circ y = (x - 4)(y - 4) + 4$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{x \text{ de } 2013 \text{ ori}} = 5$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x + e^x}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{(x+e^x)^2}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $f(x) \geq \frac{e}{e+1}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
2. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x e^{-nx^2} dx$.
- 5p a) Calculați I_0 .
- 5p b) Arătați că $I_{n+1} \leq I_n$, pentru orice număr natural n .
- 5p c) Demonstrați că $I_n = \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{e^n} \right)$, pentru orice număr natural nenul n .